Alfred Hamerle und Daniel Rösch*

Das Surrogatproblem bei „multivariaten“ CAPM-Tests

Konsequenzen der Nichtbeobachtbarkeit des Marktportefeuilles bei der empirischen Validierung des CAPM

1 Einleitung

Das wohl bekannteste finanzierungstheoretische Gleichgewichtsmodell, das *„Capital-Asset-Pricing-Model”* (CAPM) wurde von *Sharpe* (1964), *Lintner* (1965) und *Mossin* (1966) entwickelt. Das CAPM, das eine lineare Beziehung zwischen der erwarteten Rendite und dem Risiko eines Wertpapiers herstellt, ist in der modernen Finanzierungstheorie von zentraler Bedeutung. Seit mehr als zwanzig Jahren befaßt sich die Kapitalmarktforschung intensiv mit der Frage, inwieweit die theoretischen Gleichgewichtsmodelle mit Hilfe geeigneter statistischer Testverfahren empirisch validiert werden können. Besonders für den US-amerikanischen Kapitalmarkt gibt es eine Fülle an Studien hinsichtlich der Gültigkeit des CAPM, deren Resultate sehr uneinheitlich, manche sogar widersprüchlich sind. So konnte das CAPM weder bestätigt noch einheitlich abgelehnt werden.

Die meisten empirischen Untersuchungen zur Validität des CAPM basieren auf dem sog. „traditionellen zweistufigen Verfahren”, welches von *Lintner* (1965), *Douglas* (1969), *Miller/Scholes* (1972) und insbesondere *Fama/MacBeth* (1973) eingeführt wurde. Dabei wird in einem ersten Schritt für jedes Unternehmen der unbekannte Beta-Faktor anhand einer Zeitreihe geschätzt. Die sich ergebenden Schätzungen werden in einem zweiten Schritt als Regressor verwendet, und es wird ein linearer Ansatz zwischen Rendite und Risiko in einer Querschnittsregression überprüft. In einem vielbeachteten Aufsatz kritisierte *Roll* (1977) die bis dahin eingesetzten CAPM-Tests. Aufgrund der Nichtbeobachtbarkeit des Marktportefeuilles wird die prinzipielle Testbarkeit des CAPM in Frage gestellt. Nach *Roll* kann lediglich die μ-σ-Effizienz des verwendeten Surrogats überprüft werden. In den nächsten Jahren wurden in der finanzwirtschaftlichen Literatur „multivariate Tests“ entwickelt. Der Begriff „multivariater“ Test ist nicht ganz klar. Er wurde in der Finanzwirtschaft eingeführt und ist in der statistischen Literatur in dieser Form nicht gebräuchlich. Dabei werden Quer- und Längsschnittaspekt simultan betrachtet und auf eine zweistufige Vorgehensweise verzichtet. Es wird ein multivariates Regressionsmodell formuliert, in dem gleichzeitig die Beta-Faktoren

---

* Prof. Dr. *Alfred Hamerle*, Dipl. Kfm. *Daniel Rösch*, Lehrstuhl für Statistik, Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät, Universität Regensburg, 93040 Regensburg. Die Autoren danken einem anonymen Gutachter für wertvolle Verbesserungsvorschläge.
Schmalenbachs Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung (ZfbF) 49,1997 , No. 10, 858-876

geschätzt und aus dem CAPM abgeleitete Hypothesen getestet werden. Eine der ersten Untersuchungen mit diesen Methoden stammt von *Gibbons* (1982). Weiterentwicklungen und neuere Tests findet man unter anderem in *Gibbons/Ross/Shanken* (1989), *Shanken* (1985), *MacKinlay* (1987), *Amsler/Schmidt* (1985) und *Jobson/Korkie* (1982, 1989). Man vergleiche auch den Überblick in *Shanken* (1992).

Im vorliegenden Beitrag werden das Index- bzw. Surrogatproblem und seine Auswirkungen untersucht, wenn die Zusammensetzung des Marktportefeuilles nicht bekannt ist und ein Aktienindex als Surrogat verwendet werden muß. Dabei liegen die Hauptakzente auf der Analyse der Performance „multivariater" Tests. Die unzureichende Performance der zweistufigen Vorgehensweise sowie die dabei auftretenden Probleme im Zusammenhang mit einem ineffizienten Marktindex wurden bereits an anderer Stelle ausführlich analysiert. Man vergleiche dazu *Hamerle*/*Ulschmid* (1996) bzw. *Hamerle*/*Rösch* (1996 b, c). Ein weiteres Problem, das bei Verwendung von ineffizienten Benchmarks auftreten kann, ist die irrtümliche Identifikation sog. „Kapitalmarktanomalien". Darunter versteht man rein empirisch identifizierte Einflußgrößen auf die Wertpapierrenditen. Beispiele dafür sind die Unternehmensgröße, der Quotient aus Buch- und Marktwert oder das Kurs-/ Gewinn-Verhältnis. Für eine detaillierte Beschreibung der Probleme vergleiche man *Hamerle*/*Rösch* (1996 a). In der Literatur wurden verschiedene „multivariate" Tests vorgeschlagen. *Hamerle* (1996) untersuchte unter anderem die empirische Leistungsfähigkeit des Likelihoodquotienten-Tests. Es zeigt sich, daß bei diesem Prüfverfahren für die in empirischen Studien üblichen Stichprobenumfänge der α-Fehler in unkontrollierbarer Weise überhöht ist, was eine viel zu hohe Ablehnrate einer tatsächlich zutreffenden Nullhypothese zur Folge hat. Im vorliegenden Beitrag wird der von *Gibbons/Ross/Shanken* (1989) entwickelte Cross-Sectional-Regression-Test (CSR-Test) eingehend untersucht. Zunächst wird das Marktmodell abgeleitet, wobei besonderer Wert auf die korrekte Umsetzung des theoretischen, in den Verteilungsparametern formulierten CAPM in ein empirisch testbares Regressionsmodell gelegt wird. Danach wird der CSR-Test bei bekannter Zusammensetzung des Marktportefeuilles dargestellt. Im nächsten Abschnitt wird das Index- bzw. Surrogatproblem und seine Konsequenzen beschrieben. Dabei geht es nicht darum, ein a priori nicht bekanntes Marktportefeuille zu identifizieren, sondern es wird davon ausgegangen, daß ein Marktindex verwendet wird, der nicht mit dem Marktportefeuille übereinstimmt. Dann wird untersucht, was passiert, wenn für das Surrogat die Hypothese der ơ– ♦ –Effizienz getestet wird. Es zeigt sich, daß dabei neue und zum Teil nicht behebbare Probleme entstehen. Im Anschluß daran wird die Güte eines Testverfahrens analysiert, das eine zusammengesetzte Hypothese testet, daß das CAPM gilt und eine bestimmte Mindestkorrelation zwischen der als Surrogat eingesetzten Benchmark und dem risikoeffizienten Marktportefeuille vorliegt[1]. Schließlich wird die Güte einer in jüngster Zeit vorgeschlagenen multi-

[1] Vgl. *Shanken* (1987).

faktoriellen Erweiterung des CSR-Tests diskutiert[2]. Die Probleme und die empirische Brauchbarkeit der Verfahren werden im letzten Abschnitt in einem künstlich generierten Kapitalmarkt, in dem das CAPM Gültigkeit besitzt, illustriert und erörtert.

2 Das Marktmodell und der Cross-Sectional-Regression (CSR-) Test

2.1 Umsetzung des CAPM in ein empirisch testbares Regressionsmodell

Die Bewertungsgleichung des CAPM lautet

(1) $$\mu_i = \mu_M \beta_{iM}, \quad i = 1, \ldots, N .$$

Dabei sind

$\mu_i = E(R_i - r_f)$ die erwartete Überschußrendite des Unternehmens *i* (r_f ist der risikolose Zinssatz),

$\mu_M = E(R_M - r_f)$ die erwartete Marktüberschußrendite,

$\beta_{iM} = \dfrac{\mathrm{Cov}(R_i, R_M)}{\mathrm{Var}(R_M)}$ die Risikomaße, $i = 1,\ldots,N$.

Die Kovarianzmatrix der N Zufallsrenditen der Unternehmen wird mit Ω bezeichnet und als positiv definit vorausgesetzt.

Die Grundgleichung (1) des CAPM ist in Verteilungsparametern formuliert und stellt ein Ein-Perioden-Modell dar. Die Verteilungsparameter sind nicht beobachtbar. Dies bedeutet, daß das CAPM ohne Zusatzannahmen nicht testbar ist. Eine naheliegende Möglichkeit besteht in der Verwendung von am Kapitalmarkt beobachtbaren Zeitreihendaten über T Perioden. Dabei wird unterstellt, daß Beziehung (1) unverändert über den gesamten Beobachtungszeitraum hinweg gilt. Ferner wird angenommen, daß die Renditen normalverteilt und seriell unkorreliert sind. $Z_{ti} = R_{ti} - r_f$ und $Z_{tM} = R_{tM} - r_f$ bezeichnen die Überschußrenditen der Unternehmen und des Marktes in Periode t. Die risikolose Rendite r_f wird als zeitinvariant und bekannt vorausgesetzt. Zu einem festen Zeitpunkt t sind die Renditen korreliert. Ihre Kovarianzmatrix ist Ω.

Im nächsten Schritt werden die Verteilungsparameter durch am Kapitalmarkt beobachtbare Zufallsgrößen ersetzt. Die erwarteten Überschußrenditen μ_i und die erwartete Marktrendite

---

[2] Vgl. *MacKinlay* (1995), *Fama/French* (1993, 1996).

μ_M werden durch die Renditen Z_{ti} und Z_{tM} ausgedrückt. Die Risikomaße β_{iM} sind die zu schätzenden Parameter.

Setzt man

$$Z_{ti} = \mu_i + u_{ti} \text{ und } Z_{tM} = \mu_M + u_{tM}$$

mit den „Fehlervariablen“ u_{ti} bzw. u_{tM}, $t = 1, \dots, T;\ i = 1, \dots, N,$ ergibt sich aus (1)

(2) $$Z_{ti} = \alpha_i + Z_{tM}\beta_{iM} + \varepsilon_{ti}$$

$$\text{mit } \alpha_i = 0,$$
$$\varepsilon_{ti} = u_{ti} - u_{tM}\beta_{iM};\ t = 1, .., T;\quad i = 1, \dots, N.$$

Am Regressionsansatz (2) ist bemerkenswert, daß aufgrund seiner Konstruktion und der Annahmen die Fehlervariablen ε_{ti} und die (stochastischen) Regressorvariablen Z_{tM} stets unabhängig sind. Darüber hinaus gilt $E(\varepsilon_{ti} | Z_{tM}) = 0$. Der ökonometrisch interessierte Leser findet die Begründung im Anhang.

2.2 Der CSR-Test

Aus (2) läßt sich aus der Gültigkeit des CAPM die testbare Hypothese H_0: $\alpha_i = 0$ für $i = 1,...,N$ ableiten. Diese Hypothese kann mit den multivariaten Tests überprüft werden. Die Tests unterstellen eine gemeinsame Normalverteilung der Renditen. Der Test, der sich am besten bewährt hat und die exakte (bedingte) Verteilung der Teststatistik verwendet, ist der Cross-Sectional-Regression (CSR)-Test[3]. Der CSR-Test geht aus von der bedingten Verteilung des Vektors $\hat{\alpha} = (\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_N)'$ der Kleinst-Quadrate-Schätzungen des Regressionsmodells (2) bei gegebener Marktrendite $Z_{1M}, \dots, Z_{TM}$. Unter der zusätzlich getroffenen Normalverteilungsannahme sind die KQ-Schätzer ebenfalls normalverteilt und es gilt bei gegebener Marktrendite:

$$\hat{\alpha} \sim N(\alpha; \frac{1}{T}(1 + \frac{\hat{\mu}_M^2}{\hat{\sigma}_M^2})\Sigma)$$

mit $\hat{\mu}_M = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Z_{tM}$ und $\hat{\sigma}_M^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(Z_{tM} - \hat{\mu}_M)^2$.

Die Matrix Σ enthält die Kovarianzen der Fehlervariablen ε_{ti} und ε_{tj} $(i, j = 1, \dots, N)$ mit den typischen Elementen $\sigma_{ij} = w_{ij} - \beta_{iM}\beta_{jM}\sigma_M^2$. Dabei ist w_{ij} das Element der i-ten Zeile und j-ten Spalte der Rendite-Kovarianzmatrix Ω.

---

[3] Vgl. *Gibbons/Ross/Shanken* (1989).

Die Teststatistik zur Prüfung von H_0: $\alpha_i = 0$ für $i = 1, \ldots, N$ lautet:

(3) $$\mathrm{CSR} = \frac{(T-N-1)}{N}\left(1+\frac{\hat{\mu}_M^2}{\hat{\sigma}_M^2}\right)^{-1} \hat{\alpha}'\hat{\Sigma}^{-1}\hat{\alpha}\,.$$

Sie besitzt bei Gültigkeit von H_0 eine (zentrale) *F*-Verteilung mit *N* bzw. $T-N-1$ Freiheitsgraden[4] ().

2.3 Multifaktorielle Erweiterung des CSR-Tests

Einige Autoren[5] schlagen vor, neben dem verwendeten Marktindex weitere Regressoren in das Modell (2) aufzunehmen, die als zusätzliche Erklärungsgrößen in einem Mehrfaktoren-Modell dienen sollen. Die Regressoren repräsentieren „mimetische" Portefeuilles für die Faktoren eines Faktorenmodells in der APT nach *Ross* (1976) oder für die Zustandsvariablen eines intertemporalen CAPM nach *Merton* (1973).

Bezeichnet man mit x_1 den Vektor der Portefeuillegewichte eines Marktindex (mit $\sum_{i=1}^{N} x_{i1} = 1$) und mit $x_2, \ldots, x_K$ die Vektoren der Gewichte zusätzlicher in den Regressionsansatz aufgenommener Arbitrageportefeuilles (mit $\sum_{i=1}^{N} x_{ij} = 0,\ j = 2, \ldots, K$), so läßt sich hieraus die $(N \times K)$-Matrix

$$X_P = (x_1, \ldots, x_K)$$

bilden. Setzt man in Analogie zum „einfaktoriellen" CSR-Test die Werte der Regressoren als gegeben voraus, ist eine Teststatistik zur Überprüfung der Hypothese $H_0 : \alpha_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, N$ gegeben durch[6]

$$\mathrm{CSR_K} = \frac{T-N-K}{N}\left[1+\hat{\mu}'_P \hat{\Omega}_P^{-1} \hat{\mu}_P\right]^{-1} \hat{\alpha}'\hat{\Sigma}^{-1}\hat{\alpha}\,.$$

Dabei bezeichnen:

T die Anzahl der Zeitreihenbeobachtungen,

K die Anzahl der Regressoren bzw. Portefeuilles,

---

[4] Vgl. *Gibbons/Ross/Shanken* (1989), S. 1124.
[5] Vgl. *MacKinlay* (1995), *Fama/French* (1993, 1996).
[6] Vgl. *MacKinlay* (1995), S. 12.

$\hat{\mu}_P$ den Vektor der K geschätzten durchschnittlichen Portefeuillerenditen

$\sum_{i=1}^{N} x_{ik} \bar{Z}_i \quad (k = 1, \ldots, K)$,

$\hat{\Omega}_P = X_P' \, \hat{\Omega} \, X_P$ die geschätzte $\left(K \times K\right)$-Kovarianzmatrix der Portefeuillerenditen.

Die Teststatistik besitzt bei Gültigkeit von H_0 eine (zentrale) F-Verteilung mit N bzw. $T - N - K$ Freiheitsgraden.

3 Das Index- oder Surrogatproblem

3.1 Auswirkungen beim CSR-Test

Im allgemeinen ist die Zusammensetzung des Marktportefeuilles nicht bekannt und es wird ein Aktienindex als Surrogat verwendet. Hier wird stellvertretend der DAX herangezogen, die Aussagen gelten jedoch für andere Aktienindizes in analoger Weise. Für die Überschußrendite Z_{tD} des DAX gilt

(4) $$Z_{tD} = \mu_D + u_{tD}$$

mit $E(u_{tD}) = 0,\ t = 1, \ldots, T$. μ_D ist die erwartete DAX-Überschußrendite. Damit erhält man für μ_M:

$$\mu_M = Z_{tD} + (\mu_M - \mu_D) - u_{tD} \ .$$

Ferner sind im theoretischen CAPM β_{iM} durch β_{iD} zu ersetzen, da im allgemeinen die Beta-Faktoren in bezug auf das Marktportefeuille nicht mit den Beta-Faktoren in bezug auf den DAX übereinstimmen. Man setzt

$$\beta_{iM} = \beta_{iD} + (\beta_{iM} - \beta_{iD})$$

und die Umsetzung des theoretischen CAPM (1) in ein statistisches Modell ergibt

(5) $$Z_{ti} = \mu_M \beta_{iM} - \mu_D \beta_{iD} + Z_{tD} \beta_{iD} + u_{ti} - u_{tD} \beta_{iD}.$$

Dies entspricht einem multivariaten Regressionsmodell

(6) $$Z_{ti} = \alpha_i + Z_{tD} \beta_{iD} + \varepsilon_{ti}$$

$$\text{mit } \alpha_i = \mu_M \beta_{iM} - \mu_D \beta_{iD}$$

$$\varepsilon_{ti} = u_{ti} - u_{tD} \beta_{iD};\ t = 1, \ldots, T;\ i = 1, \ldots, N.$$

Aus (5) bzw. (6) folgt insbesondere:

1. Wird statt der Rendite des unbekannten Marktportefeuilles die DAX-Rendite als Regressor verwendet, werden auch die DAX-Betas geschätzt. Diese stimmen nicht mit den Marktportefeuille-Betas überein.
2. Die gravierendere Schwierigkeit besteht darin, daß in (6) die Regressionskonstanten α_i nicht null, sondern unternehmensspezifisch sind. Da die tatsächlichen Werte nicht bekannt sind, kann keine Hypothese bezüglich α formuliert und getestet werden. In den allermeisten empirischen Studien wird dennoch die Hypothese $H_0\colon\ \alpha_i = 0$ für $i = 1,\ldots,N$ getestet. Die möglichen Konsequenzen einer solchen Vorgehensweise werden im nächsten Abschnitt anhand eines künstlichen Kapitalmarkts illustriert.

Shanken (1987)[7] schlägt vor, auf der Basis des CSR-Tests eine „zusammengesetzte“ Hypothese zu testen, daß das CAPM gilt und (gleichzeitig) eine Mindestkorrelation zwischen dem als Surrogat verwendeten Indexportefeuille und dem risikoeffizienten Marktportefeuille vorliegt. Die empirische Leistungsfähigkeit dieses Testverfahrens wird ebenfalls im nächsten Kapitel demonstriert.

Nun wird untersucht, wie das Proxy-Portefeuille beschaffen sein muß, damit in (6) die Achsenabschnitte alle gleich null sind.

$$\mu_M\beta_{iM} - \mu_D\beta_{iD} = 0 \quad \text{für } i = 1,\ldots,N.$$

Bezeichnen x_M den Vektor der Marktportefeuillegewichte und x_D den Vektor der Indexportefeuillegewichte, so gilt gemäß der Definition der Vektoren der Beta-Faktoren

$$\beta_M = \frac{\Omega x_M}{\sigma_M^2} \quad \text{und} \quad \beta_D = \frac{\Omega x_D}{\sigma_D^2}.$$

Setzt man dies in obige Bedingung ein, erhält man aufgrund der positiven Definitheit von Ω:

(7)
$$x_D = k\, x_M$$
$$\text{mit} \quad k = \frac{\mu_M \cdot \sigma_D^2}{\mu_D \cdot \sigma_M^2}.$$

Dies bedeutet, der Vektor der Gewichte des Indexportefeuilles muß ein Vielfaches des Gewichtungsvektors des Marktportefeuilles sein. Dies folgt letztendlich auch aus anderen Annahmen, die in der Literatur vorgeschlagen werden, wenn das Marktportefeuille nicht beobachtet werden kann[8]. *Huang/Litzenberger* nehmen beispielsweise an, daß die Fehlervaria-

[7] Vgl. auch *Kandel/Stambaugh* (1987).
[8] Vgl. z.B. *Huang/Litzenberger* (1988), S. 308, oder *Shanken* (1992), Proposition 4.

blen in der Regression (6) in bezug auf den Index nicht mit der Rendite des Marktportefeuilles korrelieren und daß der Index einen Beta-Faktor von eins besitzt. Sie zeigen, daß dann die Beta-Faktoren in bezug auf den Index mit denjenigen in bezug auf das Marktportefeuille übereinstimmen. Daraus folgt jedoch unmittelbar wieder (7) (mit einem anderen *k*), d.h. (7) ist eine notwendige Bedingung für die Gleichheit der Beta-Faktoren.

3.2 Auswirkungen beim erweiterten CSR-Test

Fama/French (1993, 1996) schlagen vor, neben der verwendeten Marktproxy zwei weitere Portefeuilles als Regressoren in den Regressionsansatz aufzunehmen. Sie sind so konstruiert, daß sie die in früheren Arbeiten festgestellten sogenannten Kapitalmarktanomalien des Size- und des Book-To-Market-Equity-Effektes nachahmen sollen. Nach *Fama/French* (1993, 1996) ist dieses Drei-Faktor-Modell eine adäquate Beschreibung der Querschnittsbeziehung der Renditen. Dies zeigen sie, indem sie den in *Abschnitt 2.3* beschriebenen CSR-Test in einer Drei-Faktor-Version anwenden. Als zusätzliche Regressoren neben der Überschußrendite des Marktproxy-Portefeuilles werden

- die Differenz der Renditen eines Portefeuilles aus den marktwertkleinsten und eines Portefeuilles aus den marktwertgrößten Unternehmen (small minus big, SMB)
- die Differenz der Renditen eines Portefeuilles aus den Unternehmen mit der höchsten Book-to-Market-Equity-Ratio und eines Portefeuilles aus den Unternehmen mit der niedrigsten Book-to-Market-Equity-Ratio (high minus low, HML)

verwendet.

Ausgehend vom Regressionsansatz (2) erhält man analog zu den Ausführungen in *Abschnitt 3.1* die gepoolte Zeitreihen- und Querschnittsregression (eine detaillierte Ableitung ist im Anhang wiedergegeben)

$$\begin{aligned} & Z_{ti} = \alpha_i + Z_{tD}\beta_{iD} + Z_{tSMB}\beta_{iSMB} + Z_{tHML}\beta_{iHML} + \varepsilon_{ti} \\ (8) \qquad & \text{mit } \alpha_i = \mu_M\beta_{iM} - \mu_D\beta_{iD} - \mu_{SMB}\beta_{iSMB} - \mu_{HML}\beta_{iHML} \\ & \varepsilon_{ti} = u_{ti} - u_{tD}\beta_{iD} - u_{tSMB}\beta_{iSMB} - u_{tHML}\beta_{iHML} \\ & \qquad t = 1,\ldots,T;\ i = 1,\ldots,N. \end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, daß die Beta-Faktoren β_{iD} (und auch die Regressionskonstanten α_i) nicht mit denjenigen des Ein-Regressoren-Modells (6) übereinstimmen. Die Parameter in (8) ergeben sich aus einer multivariaten Regression und nur im Fall von stochastisch unabhängigen Regressoren ändern sich die Regressionskoeffizienten nicht, wenn weitere Regressoren in das Modell aufgenommen werden.

Im Regressionsansatz (8) ergeben sich wie im Modell (6) unternehmensspezifische Regressionskonstanten, wenn der verwendete Marktindex nicht risikoeffizient ist. Auch hier trifft in diesem Fall $H_0\colon \alpha_i = 0$ für alle *i* ex ante nicht zu. Die Konsequenzen einer Überprüfung dieser Nullhypothese werden im nächsten Abschnitt anhand eines künstlichen Kapitalmarkts illustriert.

4 Evaluierung der Testgüte in einem künstlichen Kapitalmarkt

Bei der Generierung des künstlichen Kapitalmarkts sind der Vektor μ^* der erwarteten Renditen, die Kovarianzmatrix Ω der Renditen, der Vektor x_M der Marktportefeuillegewichte und der risikolose Zinssatz r_f vorzugeben. Um den künstlichen Markt möglichst realitätsnah zu gestalten, werden bei der Vorgabe der Grundgesamtheitsparameter aktuelle Daten von der Deutschen Finanzdatenbank, Karlsruhe, verwendet[9]. Es wird für $N = 141$ deutsche Unternehmen die empirische Kovarianzmatrix der Wochenrenditen im Zeitraum von Januar 1988 bis Dezember 1991 ermittelt. Die resultierenden Werte werden für die Simulationsstudie als „wahre" Verteilungsparameter unterstellt.

4.1 Generierung eines künstlichen Kapitalmarkts, in dem das CAPM gilt

Als Marktportefeuille mit dem Gewichtungsvektor x_M wird ein gleichgewichteter Index gewählt, also $x_M = 1/141 \cdot 1_N$[10]. Dabei ist 1_N ein *N*-dimensionaler Einsenvektor. Dann werden „Gleichgewichtsrenditen" ermittelt, so daß das festgelegte Marktportefeuille risikoeffizient wird, denn im Kapitalmarktgleichgewicht muß das Marktportefeuille risikoeffizient sein[11]. Ein risikoeffizientes (μ-σ- effizientes) Portefeuille x_p ist die Lösung des folgenden quadratischen Optimierungsproblems[12]

$$\sigma^2(x) = x'\Omega x \to \text{Min}$$

unter der Nebenbedingung (Ertragsrestriktion)

$$x'\mu^* + (1 - \sum x_i) r_f = \mu_p^*.$$

μ_p^* ist der gewünschte Ertrag. $1 - \sum x_i$ ist der Anteil des Budgets eines Investors, der in der sicheren Anlage angelegt wird ($1 - \sum x_i > 0$) bzw. mit dem zum Zinssatz r_f Geld aufge-

---

9 Wir danken der Deutschen Finanzdatenbank, Karlsruhe, für die freundliche Überlassung der Daten.

10 Die beschriebenen Simulationen wurden auch mit anderen Marktportefeuilles, etwa einem marktgewichteten Marktportefeuille, durchgeführt. Es ergaben sich keine substantiellen Unterschiede zu dem hier verwendeten gleichgewichteten Marktportefeuille.

11 Vgl. *Roll* (1977).

12 Vgl. z.B. *Huang/Litzenberger* (1988), Kap. 3.

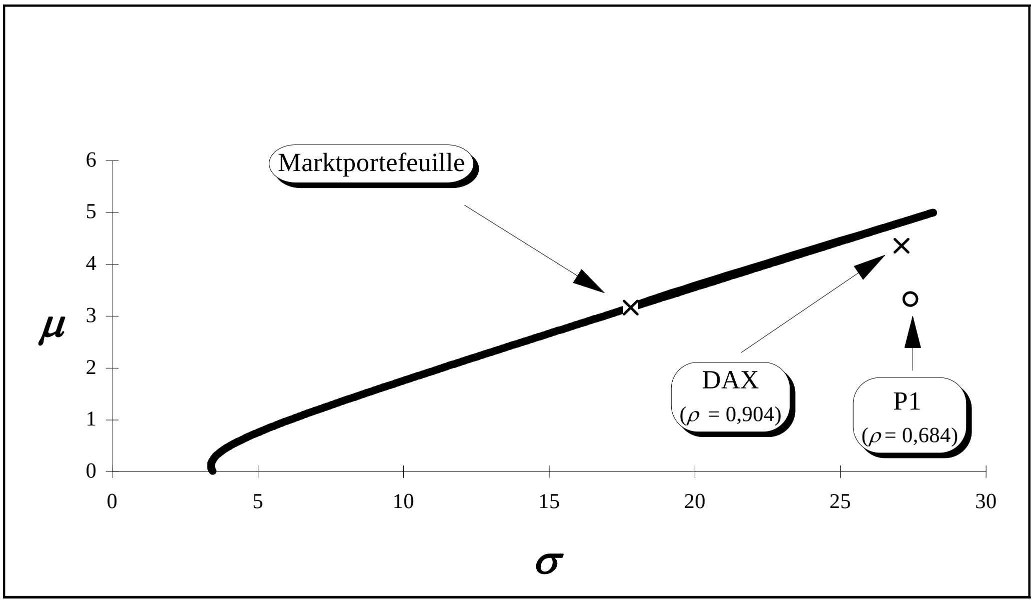
nommen wird ($1-\sum x_i < 0$). Bildet man die Lagrangefunktion, leitet diese nach x ab, erhält man durch Nullsetzen dieser Ableitung eine notwendige Bedingung für risikoeffiziente Portefeuilles. Soll das Marktportefeuille x_M risikoeffizient sein, muß x_M diese Bedingung erfüllen. Man erhält auf diese Weise folgende Bestimmungsgleichung für die erwarteten Überschußrenditen $\mu = \mu^* - r_f 1_N$:

$$2\Omega x_M = \lambda_M \mu . \tag{9}$$

Durch (9) ist die Struktur der erwarteten Gleichgewichtsüberschußrenditen determiniert, die erwarteten Überschußrenditen selbst sind nur bis auf einen multiplikativen Faktor eindeutig festgelegt. Im vorliegenden Kapitalmarkt wird dieser Faktor so festgelegt, daß die erwartete Überschußrendite des Marktes $\mu_M = 0{,}00316805$ ($\approx 16{,}47\%$ p.a.) beträgt. Die maximale erwartete Einzelrendite eines Unternehmens beträgt ca. 30% p.a. Der risikolose Zinssatz wird mit $r_f = 0{,}000577$ ($\hat{=}\ 3\%$ p.a.) festgelegt.

Als Proxy-Variablen für das Marktportefeuille werden der DAX sowie ein weiteres (gleichgewichtetes) Portefeuille, bestehend aus fünf Unternehmen[13], verwendet. In dem hier erzeugten Kapitalmarkt sind die Proxies nicht risikoeffizient. Die Korrelation des DAX mit dem Marktportefeuille beträgt 0,904, die der Proxy-Variablen P1 0,684. Zur Illustration sind in *Abbildung 1* die Effizienzlinie sowie die Positionen des Marktportefeuilles und der Proxies abgebildet (die vertikale Achse enthält die erwarteten Überschußrenditen; alle Angaben in Promille).

Abbildung 1: Effizienzlinie und Positionen von Marktportefeuille, DAX und Proxy P1

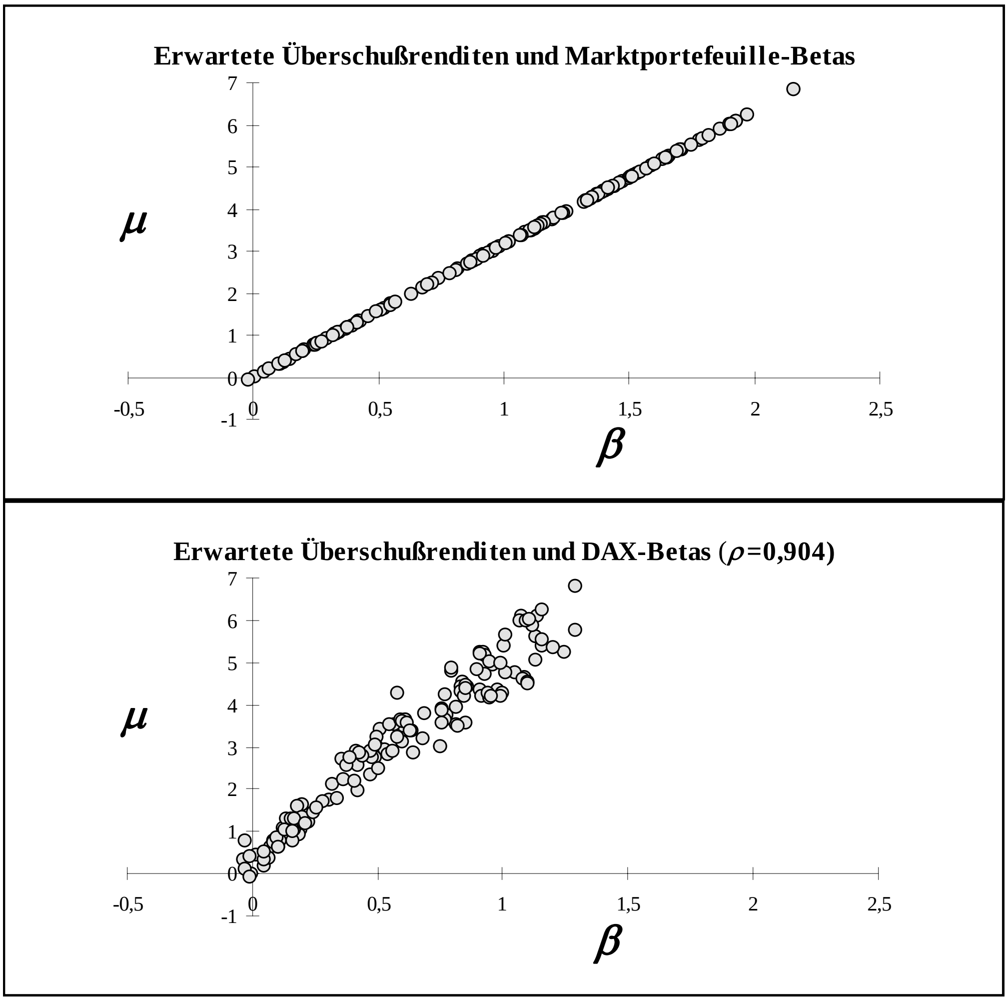


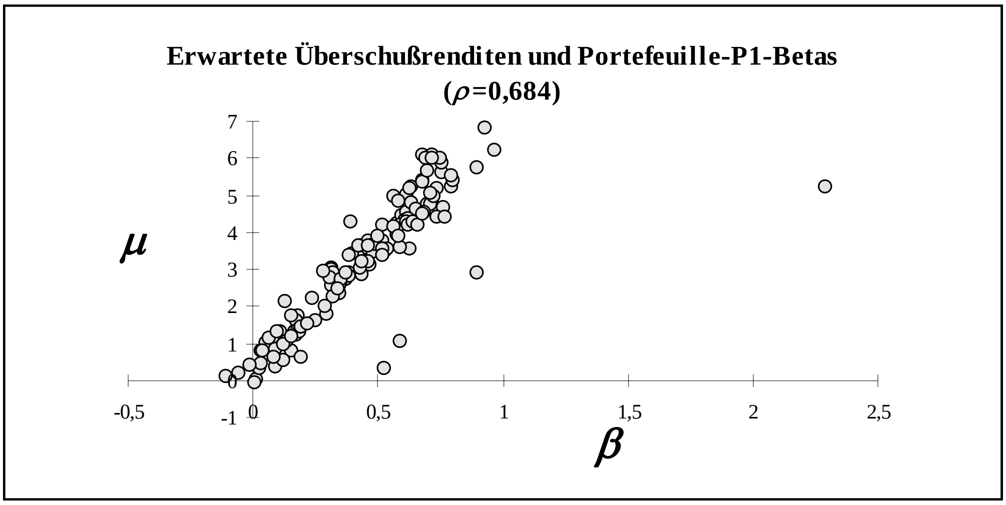
[13] Portefeuille P1 besteht aus den Unternehmen *BASF AG, BMW AG (Stammaktien), Berliner Kindl Brauerei AG, H. Berthold AG, Tarkett Pegulan AG (Stammaktien).*

Damit sind für den hier erzeugten Kapitalmarkt sämtliche Verteilungsparameter vorgegeben. In den Simulationen werden normalverteilte Renditen mit dem erwarteten Überschußrenditenvektor μ und der Kovarianzmatrix Ω erzeugt. Die generierten Renditevektoren R_t sind zu verschiedenen Zeitpunkten stochastisch unabhängig. Im Gegensatz zur Realität sind in dieser künstlich geschaffenen Simulationswelt die Risikoeffizienz des Marktportefeuilles und die Linearität zwischen erwarteter Überschußrendite μ_i und Risikomaß β_{iM} gewährleistet.

In *Abbildung 2* werden die Beziehungen zwischen den erwarteten Renditen und den Marktportefeuille-Betas bzw. den DAX- und Portefeuille-P1-Betas illustriert.

Abbildung 2: Relationen zwischen erwarteten Überschußrenditen und Marktportefeuille-, DAX- bzw. P1-Betas





4.2 Der CSR-Test

Ausgangspunkt ist das multivariate Regressionsmodell (2). Da die exakte Verteilung der CSR-Teststatistik bei gegebener Markt- bzw. Proxy-Rendite bekannt ist, können einige theoretische Resultate bezüglich der Güte dieses Tests abgeleitet werden. Diese Ergebnisse werden anschließend anhand von Simulationsstudien illustriert.

Gibbons/Ross/Shanken (1989) haben gezeigt, daß bei gegebener Index-Rendite $Z_{1D},\dots,Z_{TD}$ die Teststatistik

$$\mathrm{CSR} = \frac{(T-N-1)}{N} \quad \frac{\hat{\alpha}'\,\hat{\Sigma}^{-1}\,\hat{\alpha}}{(1+\hat{\theta}_D^2)}$$

eine nicht-zentrale *F*-Verteilung besitzt mit *N* und $T-N-1$ Freiheitsgraden und dem Nichtzentralitätsparameter $\lambda = \frac{T}{(1+\hat{\theta}_D^2)}\,\alpha'\,\Sigma^{-1}\,\alpha$. Dabei sind

$$\hat{\alpha}' = \left(\hat{\alpha}_1,\dots,\hat{\alpha}_N\right) \quad \text{und} \quad \hat{\theta}_D^2 = \frac{\hat{\mu}_D^2}{\hat{\sigma}_D^2} \quad \left(\text{quadriertes Sharpe - Maß}\right).$$

Unter der Nullhypothese H_0: $\alpha_i = 0$ für $i = 1,\dots,N$ besitzt die Prüfgröße CSR eine zentrale *F*-Verteilung mit *N* und $T-N-1$ Freiheitsgraden. Diese Verteilung hängt nicht von der Bedingung ab und ist somit auch die unbedingte Verteilung.

Gibbons/Ross/Shanken (1989) haben außerdem gezeigt, daß der Nichtzentralitätsparameter sich nicht nur in Abhängigkeit von $\alpha'\,\Sigma^{-1}\alpha$ darstellen läßt, sondern auch durch die Sharpe-Maße des (risikoeffizienten) Marktportefeuilles und der verwendeten Proxy-Variablen ausgedrückt werden kann. Es gilt

(10) $$\lambda = \frac{T}{1+\hat{\theta}_D^2}\,(\theta_M^2 - \theta_D^2).$$

Shanken (1987)[14] zeigte ferner, daß der Nichtzentralitätsparameter auch in Abhängigkeit vom Korrelationskoeffizienten ρ_{MD} zwischen Marktportefeuille und Proxy dargestellt werden kann. Es gilt

(11) $$\lambda = \frac{T}{1+\hat{\theta}_D^2}\,\theta_M^2(1-\rho_{MD}^2)\,.$$

Für eine perfekte Korrelation zwischen Marktportefeuille und Surrogat ergibt sich $\lambda = 0$. Ersetzt man in (11) die Realisierung $\hat{\theta}_D$ durch den wahren Wert θ_D, läßt sich λ umformen zu

(12) $$\lambda = T\theta_M^2\,\frac{1-\rho_{MD}^2}{1+\theta_M^2\rho_{MD}^2}\,.$$

Im hier generierten künstlichen Kapitalmarkt können alle Parameter berechnet werden. Die folgenden *Abbildungen 3* und *4* enthalten die Ablehnwahrscheinlichkeiten der Nullhypothese H_0: $\alpha_i = 0$ für $i = 1,\ldots,N$ des CSR-Tests für unterschiedliche Korrelationskoeffizienten ρ und Stichprobenumfänge *T*, bzw. für den DAX und die Proxy-Variable P1 in Abhängigkeit von der Anzahl *T* der Zeitpunkte.[15]

Abbildung 3: Ablehnwahrscheinlichkeiten des CSR-Tests bei Verwendung von Proxies mit unterschiedlichen Korrelationskoeffizienten und Anzahlen T der Zeitpunkte

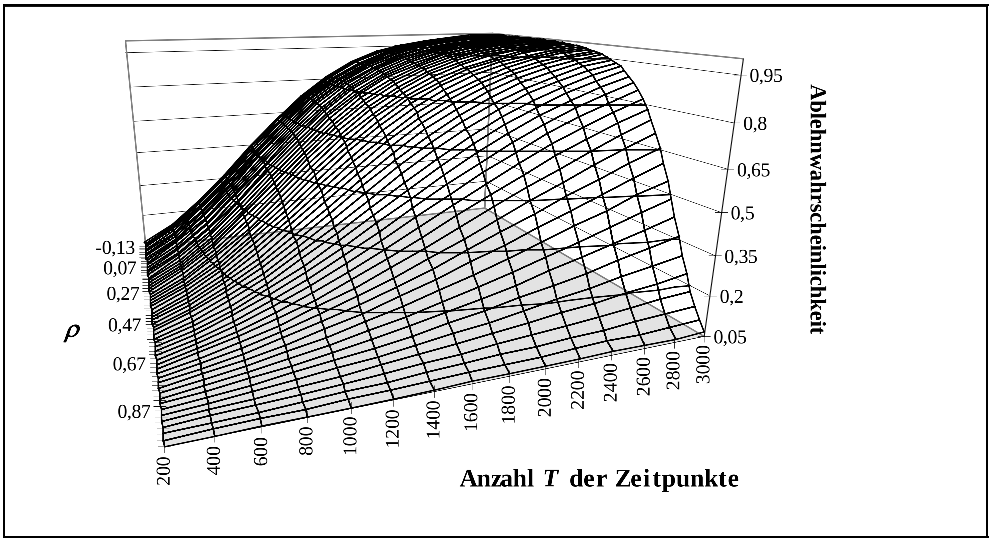
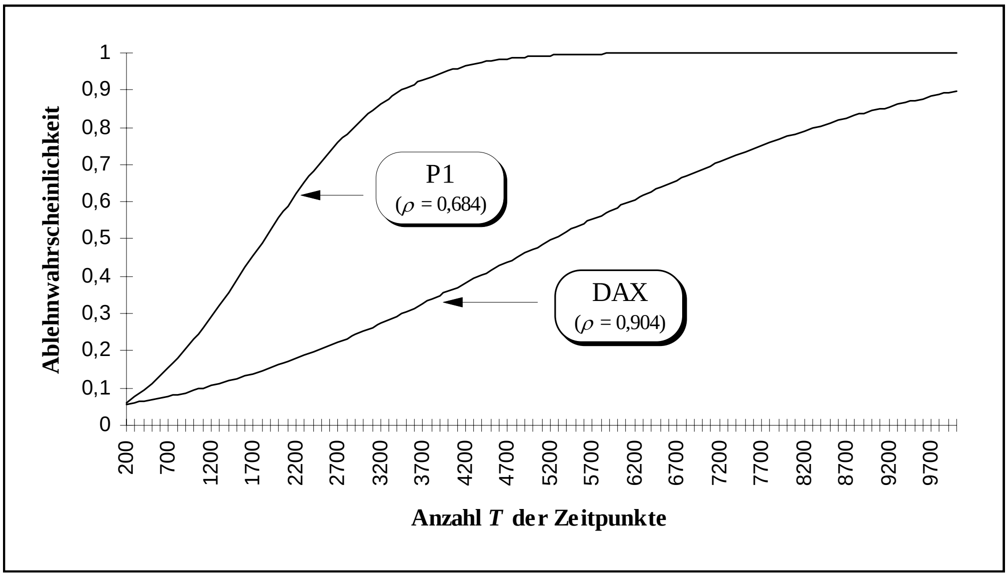


Abbildung 4: Ablehnwahrscheinlichkeiten des CSR-Tests bei Verwendung des DAX und der Proxy-Variablen P1 in Abhängigkeit von der Anzahl T der Zeitpunkte

---

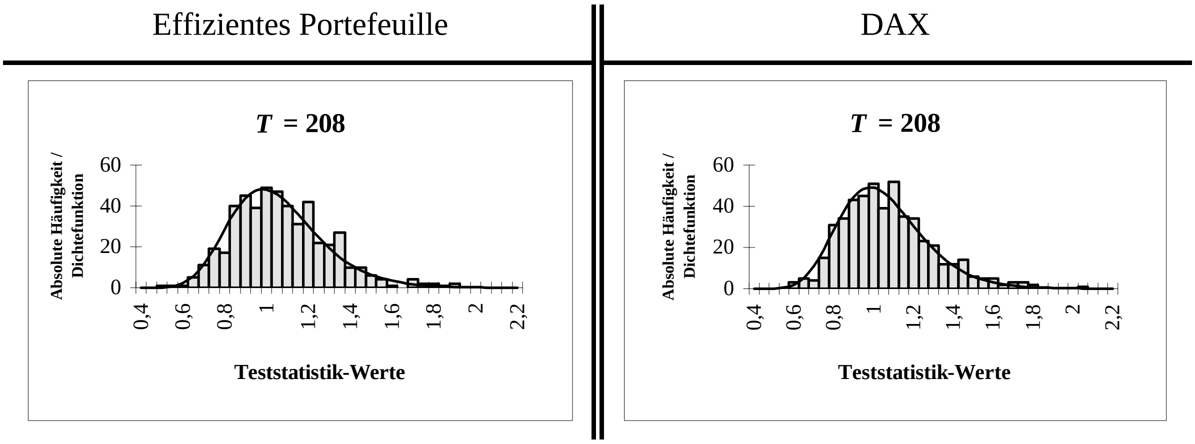
14 Vgl. auch *Kandel/Stambaugh* (1987).

15 Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten ergeben sich aus den Wahrscheinlichkeiten, daß die nichtzentral *F*-verteilte Prüfgröße mit dem Nichtzentralitätsparameter λ aus (12) das 95%-Quantil der zentralen *F*-Verteilung (mit *N* bzw. $T - N - 1$ Freiheitsgraden) überschreitet.



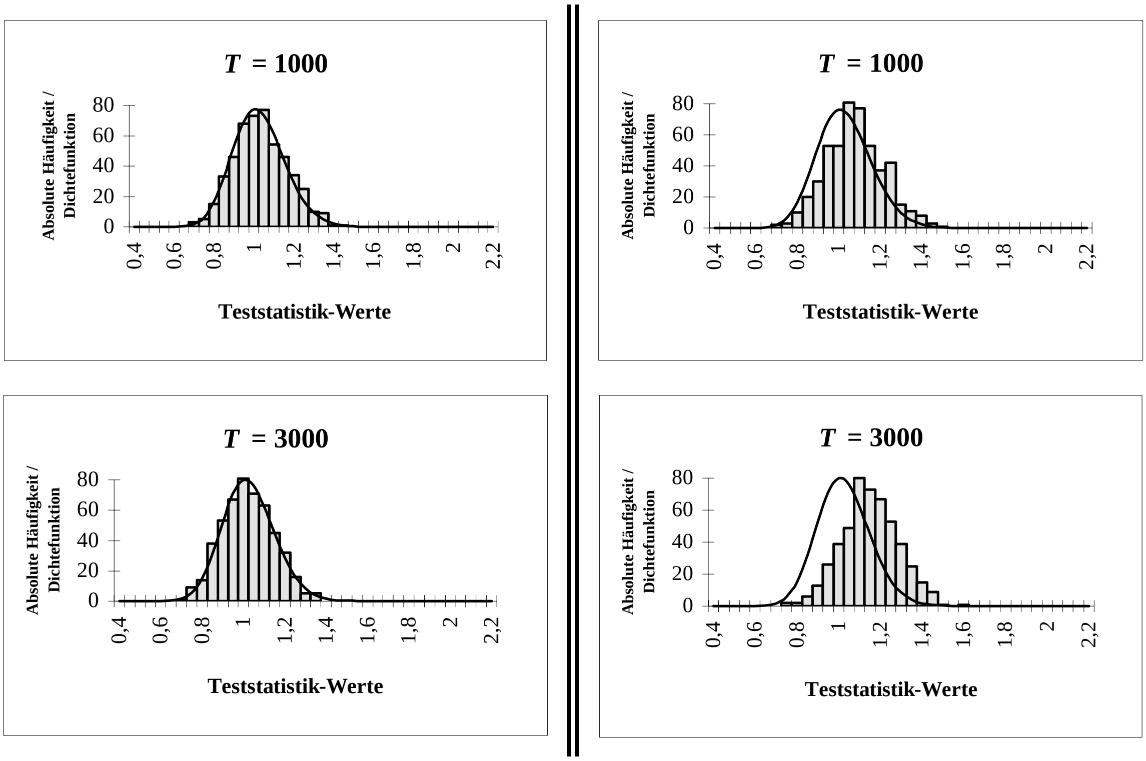
Die *Abbildungen 3* und *4* machen deutlich, daß der CSR-Test eine äußerst geringe Macht besitzt. Selbst bei der Proxy-Variablen P1, die wohl niemand als Surrogat für die Marktentwicklung heranziehen würde und deren Korrelation mit dem Marktportefeuille nur 0,684 beträgt, ist noch eine enorm große Anzahl T von Zeitpunkten notwendig, damit der CSR-Test die nicht zutreffende Nullhypothese mit ausreichender Wahrscheinlichkeit als falsch erkennt. Fordert man beispielsweise eine Ablehnwahrscheinlichkeit von 0,8, so sind mindestens T = 2900 Wochenrenditen (entspricht einem 56-Jahres-Zeitraum) notwendig. Die mangelhafte Macht wird durch die Simulationsergebnisse bestätigt, die in *Abbildung 5* dargestellt sind. Hierbei sind jeweils 500 Simulationsläufe und ein Signifikanzniveau von 5 Prozent zugrundegelegt.

Abbildung 5: Häufigkeitsverteilungen der Teststatistik-Werte und theoretische Prüfverteilungen für den CSR-Test bei bekanntem Marktportefeuille bzw. bei Verwendung des DAX als Proxy für unterschiedliche Anzahlen T der Beobachtungszeitpunkte[16]



[16] Die entsprechenden Prozentsätze der abgelehnten Nullhypothesen betragen:

- für das Marktportefeuille: 5,6% (T = 208), 5,2% (T = 1000), 4,9% (T = 3000)
- für den DAX: 7,2% (T = 208), 10,8% (T = 1000), 25,6% (T = 3000).



4.3 *Prüfung der „zusammengesetzten" Hypothese der Gültigkeit des CAPM und einer bestimmten Mindestkorrelation zwischen Proxy und Tangentialportefeuille*

Shanken (1987)[17] hat eine Modifikation des CSR-Tests vorgeschlagen, um eine zusammengesetzte Hypothese

(a) das CAPM gilt, und

(b) die Korrelation der Proxy mit dem Tangentialportefeuille beträgt mindestens ρ_0

zu testen.

Shanken (1987) zeigte, daß aus der gemeinsamen Hypothese die Bedingung $\alpha'\Sigma^{-1}\alpha \le \theta_D^2(\rho_0^{-2}-1)$ folgt. Dazu äquivalent ist eine Bedingung für den Nichtzentralitätsparameter λ, die von *Shanken* in Form der letztlich getesteten Nullhypothese ausgedrückt wird durch

(13) $$H_0\colon\ \lambda \le T\theta_D^2(\rho_0^{-2}-1)\,/\,(1+\hat{\theta}_D^2).$$

(13) gibt eine obere Schranke für den Nichtzentralitätsparameter der Verteilung der CSR-Teststatistik an. Diese obere Schranke ist bei praktischen Anwendungen zu ermitteln (allerdings ist θ_D in der Praxis nicht bekannt und muß geeignet approximiert werden!) und als (maximaler) Nichtzentralitätsparameter der entsprechenden *F*-Verteilung einzusetzen. Überschreitet der Wert der CSR-Teststatistik das (1-α)-Quantil dieser *F*-Verteilung, wird die Nullhypothese verworfen. Führt der Test zur Ablehnung, ist nicht klar, ob Hypothese (a) oder

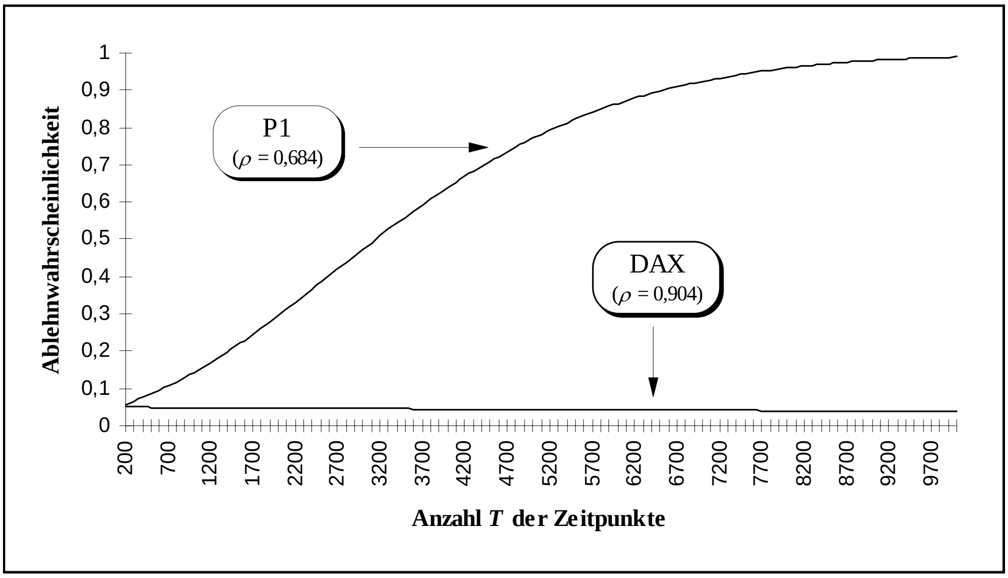
---

[17] Vgl. auch *Kandel/Stambaugh* (1987).

Hypothese (b) oder beide Hypothesen falsch sind, da die Zusammensetzung des Tangentialportefeuilles und damit auch die Korrelation der verwendeten Proxy mit dem Tangentialportefeuille nicht bekannt ist. Lediglich Aussagen der Form: „Wenn die Korrelation der Proxy mit dem Tangentialportefeuille mindestens ρ_0 beträgt, dann gilt das CAPM nicht!“ sind möglich.

Für eine perfekte Korrelation $\rho_0 = 1$ ergibt sich der bereits vorher behandelte Fall mit $\lambda = 0$. Wie gezeigt ist aber schon in diesem Fall die Güte des CSR-Tests äußerst gering (vgl. *Abbildungen 3* bis *5*). Andererseits wird mit fallendem ρ_0 der Nichtzentralitätsparameter immer größer, während die CSR-Teststatistik unverändert bleibt. Damit sinkt aber auch die Ablehnwahrscheinlichkeit und die Power des Tests nimmt weiter ab. Zur Verdeutlichung des Problems werden wieder der DAX und das Proxy-Portefeuille P1 betrachtet. Der im letzten Abschnitt beschriebene Test von H_0: $\alpha_i = 0$ für $i = 1, \ldots, N$ kann auch aufgefaßt werden als Test der zusammengesetzten Hypothese H_0: CAPM gilt und $\rho_0 = 1$. Diese Nullhypothese trifft für beide Proxies definitiv nicht zu, doch geht aus *Abbildung 5* hervor, daß der CSR-Test kaum in der Lage ist, die falsche Nullhypothese als solche zu erkennen. Dies ist dann bei der Überprüfung obiger zusammengesetzter Hypothese mit einem ρ_0 kleiner als eins erst recht der Fall. Die folgende *Abbildung 6* gibt die Ablehnwahrscheinlichkeiten bei „zusammengesetzter“ Hypothese mit $\rho_0 = 0{,}9$ in Abhängigkeit von der Anzahl *T* der Zeitpunkte und bei einem Signifikanzniveau von 5 Prozent an.

Abbildung 6: Ablehnwahrscheinlichkeiten bei „zusammengesetzter“ Hypothese mit $\rho_0 = 0{,}9$ in Abhängigkeit von der Anzahl T der Zeitpunkte



Während für den DAX, bei dem die zusammengesetzte Hypothese zutrifft, die Ablehnwahrscheinlichkeit (korrekterweise) stets unter 5 % bleibt, sind für die Proxy-Variable P1 enorm große Stichprobenumfänge notwendig, um die nun falsche Nullhypothese mit ausreichender Wahrscheinlichkeit auch als solche zu erkennen. Soll wie im letzten Abschnitt eine Ablehnwahrscheinlichkeit der faktisch nicht zutreffenden Nullhypothese von 0,8 erreicht werden, so sind mindestens T = 5300 Wochenrenditen notwendig. Auch wenn der zugelassene α-Fehler erhöht wird, sind die notwendigen Stichprobenumfänge immer noch völlig unrealistisch.

4.4 Die Güte des CSR-Tests im Multifaktor-Fall

Charakteristisch für den CSR-Test im Multifaktor-Fall ist die Aufnahme zusätzlicher Regressoren zur Marktproxyrendite in das multivariate Regressionsmodell. Die zusätzlichen Portefeuilles sollen die in der Literatur häufig festgestellten Anomalien wie den Size- oder den Book-to-Market-Equity-Effekt auffangen[18]. Im hier generierten künstlichen Kapitalmarkt können die Auswirkungen auf die Power des Tests deutlich gemacht werden, wenn das CAPM gilt und zusätzlich zu einem ineffizienten Marktproxy (z.B. dem DAX) weitere Portefeuilles als Regressoren verwendet werden.

Zur Konstruktion des ersten zusätzlichen Portefeuilles wird in Analogie zu den *Fama/French*-Studien folgendermaßen vorgegangen. Die $N = 141$ Unternehmen werden anhand ihrer Marktwerte zu einem festen Zeitpunkt in eine Rangfolge gebracht und in zwei Klassen geteilt („große“ und „kleine“ Unternehmen). Die Rendite des Portefeuilles ergibt sich dann als Differenz der Durchschnittsrenditen der kleinen und der großen Unternehmen (small minus big, SMB).

Die Konstruktion des zweiten zusätzlichen Portefeuilles erfolgt ebenfalls zunächst durch Rangordnung der Unternehmen, allerdings nach ihrem Verhältnis von Buch- zu Marktwert des Eigenkapitals (Book-to-Market-Equity). Anschließend wird eine Einteilung in drei Klassen (high, middle, low) vorgenommen und die Portefeuillerendite ergibt sich als Differenz der Durchschnittsrenditen der „high“- und der „low-equity“-Unternehmen (high minus low, HML).

Die Gewichte der beiden zusätzlichen Portefeuilles x_{iSMB} und x_{iHML} $(i = 1,\dots,N)$ addieren sich jeweils zu Null auf. Es handelt sich also hierbei um Arbitrageportefeuilles.

Die Teststatistik CSR_K besitzt unter H_1 für gegebene Regressorrenditen eine nicht-zentrale F-Verteilung mit N und $T - N - K$ Freiheitsgraden[19] und dem Nichtzentralitätsparameter

$$\lambda = T[1 + \hat{\mu}'_P \hat{\Omega}_P^{-1} \hat{\mu}_P]^{-1} \; \alpha' \; \Sigma^{-1} \alpha$$

---

[18] Vgl. *Fama/French* (1993, 1996).
[19] Vgl. *MacKinlay* (1995), S. 12.

mit α wie in (8) und ist unter H_0 unbedingt zentral F-verteilt mit N und $T-N-K$ Freiheitsgraden. Analog zu *Gibbons/Ross/Shanken* (1989) ergibt sich auch hier der Zusammenhang[20]

$$\alpha' \, \Sigma^{-1} \, \alpha = \theta_M^2 - \theta_P^2$$

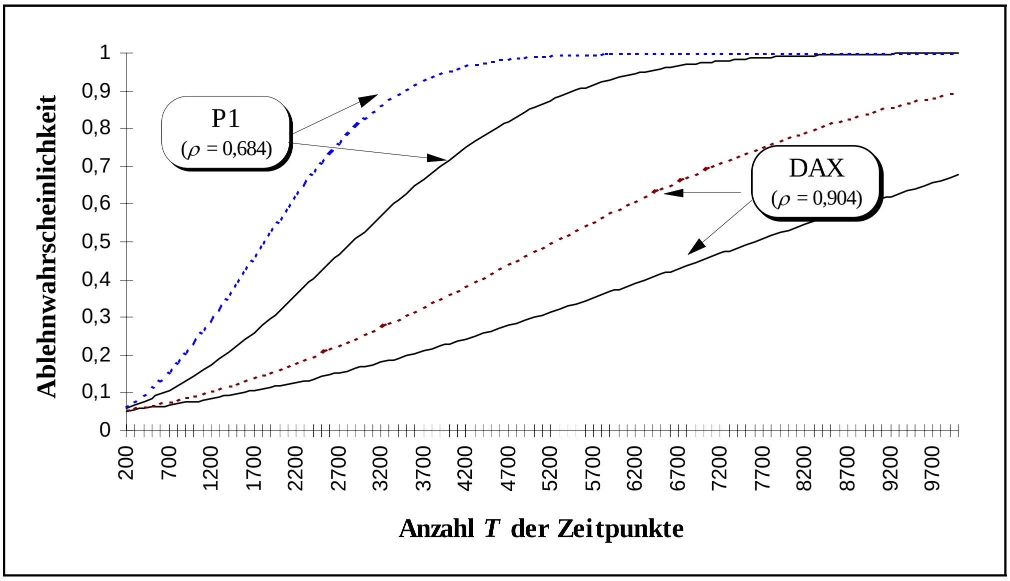
wobei θ_M^2 das quadrierte Sharpe-Maß des ($\mu - \sigma -$ effizienten) Marktportefeuilles und

$$\theta_P^2 = \mu_P' \, \Omega_P^{-1} \, \mu_P = (X_P'\mu)'(X_P'\Omega X_P)^{-1}(X_P'\mu)$$

das quadrierte Sharpe-Maß der Regressor-Portefeuilles bezeichnen.

Im hier generierten künstlichen Kapitalmarkt wird die ohnehin geringe Güte des CSR-Tests im Ein-Regressor-Fall durch die Hinzunahme der beiden Arbitrageportefeuilles noch stark verschlechtert, wie in *Abbildung 7* zu erkennen ist. Dabei entsprechen die gestrichelten Linien den Funktionsverläufen aus *Abbildung 4*, wenn nur der Marktindex bzw. Portefeuille P1 als Regressor verwendet wird. Die abfallende Macht zeigt sich auch bei den durchgeführten Simulationen. Zwar erkennt der Test die richtige Nullhypothese, wenn das Marktportefeuille als erstes Portefeuille in die Regression aufgenommen wird, für den Fall des DAX als erstem Regressor verringert sich die Testgüte gegenüber dem Ein-Faktor-Fall jedoch deutlich. [21]

Abbildung 7: Ablehnwahrscheinlichkeiten für den Drei-Regressor-Fall im Vergleich zum Ein-Regressor-Fall für den DAX und die Proxy-Variable P1



[20] Vgl. auch *MacKinlay* (1995), S. 10.

[21] Die entsprechenden Prozentsätze der abgelehnten Nullhypothesen betragen:

- für das Marktportefeuille 6,3% (T=208), 4,6% (T=1000), 4,8% (T=3000)
- für den DAX 4,6% (T=208), 7,8% (T=1000), 16,4% (T=3000), (die entsprechenden Werte bei ausschließlicher Verwendung des DAX waren 7,2% (T=208), 10,8% (T=1000), 25,6% (T=3000))

Um eventuellen Mißverständnissen vorzubeugen, erscheinen einige Anmerkungen angebracht. Die Ausführungen der letzten Abschnitte richten sich nicht gegen die von *Fama/French* durchgeführten Studien. Vielmehr sollen die Schwächen der verwendeten ökonometrisch-statistischen Testverfahren aufgezeigt werden. Ist der als Surrogat für das Marktportefeuille eingesetzte Index nicht effizient bzw. ist keines der zusätzlich in den Ansatz aufgenommenen Portefeuilles effizient, trifft die getestete Hypothese nicht zu und sollte eigentlich abgelehnt werden. Die Macht des Tests ist jedoch äußerst gering, so daß leicht Fehlinterpretationen möglich sind. So ist beispielsweise folgendes Szenario denkbar und mit den Ergebnissen des Tests kompatibel: Das CAPM gilt, d.h. das Marktportefeuille ist effizient und der Test in einer Ein-Portefeuille-Regression führt aufgrund der Ineffizienz des Marktindexes (richtigerweise) zur Ablehnung. Dies könnte dazu veranlassen, weitere Einflußfaktoren in den Ansatz aufzunehmen und zu überprüfen, ob die Kombination dieser Faktoren effizient ist. Die sich verschlechternde Güte des Tests kann zur Folge haben, daß die Nullhypothese in der Mehr-Faktor-Regression nicht abgelehnt wird. Wie die Resultate dieses Abschnitts zeigen, muß die dann naheliegende Interpretation der Gültigkeit eines Mehr-Faktor-Modells bzw. der Schluß auf die Existenz von Kapitalmarktanomalien nicht zwingend den Tatsachen entsprechen.

5 Zusammenfassung

Sowohl die theoretische Analyse als auch die Simulationsstudien in einem künstlichen Kapitalmarkt zeigen die grundlegenden Probleme bei der empirischen Validierung des CAPM, wenn die Zusammensetzung des Marktportefeuilles nicht bekannt ist und ein Aktienindex als Surrogat verwendet wird. Dieses Index- oder Surrogatproblem wird bereits von *Roll* (1977) - allerdings von einem anderen Standpunkt aus - ausführlich dargestellt und erörtert. Im vorliegenden Beitrag wird gezeigt, daß auch die neueren „multivariaten“ Tests nur einen Teil der Probleme beheben können. Ist das Indexproblem von Bedeutung, kann nicht ohne weiteres eine überprüfbare Hypothese aus der Gültigkeit des CAPM abgeleitet werden. Ferner wird gezeigt, daß die Tests (hier stellvertretend der Cross-Sectional-Regression-Test) nur eine äußerst geringe Macht besitzen, um eine falsche Nullhypothese als solche zu erkennen. So sind enorm große und damit völlig unrealistische Stichprobenumfänge (=Anzahl der Zeitpunkte) notwendig, damit auch für Surrogate mit relativ hohen Korrelationen mit dem effizienten Marktportefeuille eine ausreichend hohe Wahrscheinlichkeit der Ablehnung der (falschen) Nullhypothese erzielt werden kann. Schließlich wurde noch die Güte eines in der Literatur vorgestellten Testverfahrens analysiert, das ebenfalls auf dem Cross-Sectional-Regression-Test basiert und eine „zusammengesetzte“ Hypothese testet, daß das CAPM gilt und eine bestimmte Mindestkorrelation zwischen der Proxy-Variablen und dem Marktportefeuille vorliegt. Es stellt sich heraus, daß die Güte dieses Testverfahrens noch schlechter ist als die des gewöhnlichen CSR-Tests, so daß auch diese Vorgehensweise bei der empirischen Gültigkeitsprüfung mit erheblichen Problemen verbunden ist. Ähnliches gilt für eine in jüngerer Zeit vorgeschlagene multifaktorielle Erweiterung des CSR-Tests, bei der außer dem Marktindex weitere Variablen in den Regressionsansatz aufgenommen werden. Auch bei diesem Test resultiert eine Verschlechterung der Testgüte, die zu Fehlinterpretationen und falschen Schlußfolgerungen führen kann.

Insgesamt ist festzustellen, daß durch das Index- bzw. Surrogatproblem bei der empirischen Validierung des CAPM grundlegende und nicht ohne weiteres behebbare Schwierigkeiten entstehen, so daß die Einwände von *Roll* (1977) bei Nichtbeobachtbarkeit des Marktportefeuilles auch für die neueren CAPM-Tests hohe Relevanz besitzen.

Anhang

A. Eigenschaften des Regressionsmodells (2)

Da für die Überschußrenditen Z_i (der Index *t* wird der Einfachheit halber weggelassen) eine gemeinsame Normalverteilung unterstellt wird und die Marktrendite Z_M eine Linearkombination der Renditen der Einzelunternehmen ist, besitzen Z_i und Z_M eine gemeinsame Normalverteilung mit den Erwartungswerten μ_i und μ_M, den Varianzen σ_i^2 und σ_M^2 und der Kovarianz σ_{iM} $(i=1,\dots,N)$. Aus der Theorie der multivariaten Normalverteilung und der bedingten Verteilungen[22] folgt, daß dann Z_i bei gegebenem Z_M (eindimensional) normalverteilt ist mit Erwartungswert

$$\mu_{i/M} = \mu_i - \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}(Z_M - \mu_M)$$

und Varianz

$$\sigma_{i/M}^2 = \sigma_i^2 - \beta_i^2\sigma_M^2 \quad \text{mit} \quad \beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}.$$

Entsprechend der Konstruktion des Regressionsmodells (2) gilt dann für den Fehlerterm

$$E(\varepsilon_i|Z_M) = E(u_i|Z_M) - u_M\beta_i .$$

mit $u_i = Z_i - \mu_i$ und $u_M = Z_M - \mu_M$. Daraus folgt aber sofort

$$E(\varepsilon_i|Z_M) = \mu_{i/M} - \mu_i - u_M\beta_i = 0 .$$

Für die Kovarianz zwischen Z_M und ε_i ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Z_M,\varepsilon_i) &= \mathrm{Cov}(Z_M,u_i) - \beta_i\ \mathrm{Cov}(Z_M,u_M)\\ &= \sigma_{iM} - \beta_i\sigma_M^2\\ &= 0.\end{aligned}$$

B. Ableitung des Regressionsmodells (8)

Ausgangspunkt ist das multivariate Regressionsmodell (2)

$$Z_{ti} = \alpha_i + Z_{tM}\beta_{iM} + \varepsilon_{ti}$$

$$\text{mit } \alpha_i = 0$$

$$\varepsilon_{ti} = u_{ti} - u_{tM}\beta_{iM}, \qquad i=1,\dots,N; \quad t=1,\dots,T,$$

[22] Vgl. z.B. *Fahrmeir/Hamerle/Tutz* (1996), S. 27/28, Spezialfall $p = q = 1$.

und dem risikoeffizienten Marktportefeuille mit der Überschußrendite Z_{tM}.

Werden anstelle des Marktportefeuilles die drei beschriebenen Portefeuilles mit den Überschußrenditen Z_{tD}, Z_{tSMB} und Z_{tHML} als Regressoren verwendet, so lassen sich Z_{tM} (bzw. μ_M) und β_{iM} ausdrücken durch

$$\mu_M = Z_{tD} + Z_{tSMB} + Z_{tHML} + \mu_M - \mu_D - \mu_{SMB} - \mu_{HML} - u_{tD} - u_{tSMB} - u_{tHML}$$

$$\beta_{iM} = \beta_{iD} + \beta_{iSMB} + \beta_{iHML} + \beta_{iM} - \beta_{iD} - \beta_{iSMB} - \beta_{iHML}.$$

Setzt man diese Ausdrücke in Modell (2) ein und faßt zusammen, ergibt sich Regressionsmodell (8).

Literatur

Amsler, Christine E./Schmidt, Peter (1985), A Monte Carlo Investigation of the Accuracy of Multivariate CAPM Tests, in: Journal of Financial Economics, Vol. 14, S. 359-375.

Douglas, George W. (1969), Risk in the Equity Markets: An Empirical Appraisal of Market Efficiency, in: Yale Economic Essays, Vol. 9, S. 3-45.

Fahrmeir, Ludwig/Hamerle, Alfred/Tutz, Gerhard (Hrsg.) (1996), Multivariate statistische Verfahren, 2. Aufl.

Fama, Eugene F./MacBeth, James D. (1973), Risk, Return, and Equilibrium: Empirical Tests, in: Journal of Political Economy, Vol. 81, S. 607-636.

Fama, Eugene F./French, Kenneth R. (1993), Common Risk Factors in the Returns on Stocks and Bonds, in: Journal of Financial Economics, Vol. 33, S. 3-56.

Fama, Eugene F./French, Kenneth R. (1996), Multifactor Explanations of Asset Pricing Anomalies, in: Journal of Finance, Vol. 51, S. 55-84.

Gibbons, Michael R. (1982), Multivariate Tests of Financial Models: A New Approach, in: Journal of Financial Economics, Vol. 10, S. 3-27.

Gibbons, Michael R./Ross, Stephen A./Shanken, Jay (1989), A Test of the Efficiency of a given Portfolio, in: Econometrica, Vol. 57, S. 1121-1152.

Hamerle, Alfred (1996), Empirische Performance „multivariater“ Tests des Capital-Asset-Pricing-Models, in: Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, 215, S. 228-244.

Hamerle, Alfred/Rösch, Daniel (1996a), Kapitalmarktanomalien und Rendite-Risiko-Beziehung bei einem ineffizienten Marktindex, in: Finanzmarkt und Portfolio Management 10, S. 61-74.

Hamerle, Alfred/Rösch, Daniel (1996b), Ineffiziente Benchmarks und Identifikation der Bestimmungsfaktoren von Wertpapierrenditen, in: Allgemeines Statistisches Archiv 80/3, S. 299-312.

Hamerle, Alfred/Rösch, Daniel (1996c), Empirische Rendite-Risiko-Beziehung in der Kapitalmarktforschung: Meßfehlerproblem und Vergleich von OLS- und GLS-Schätzung, in: Allgemeines Statistisches Archiv 80/4, S. 361-370.

Hamerle, Alfred/Ulschmid, Christoph (1996), Empirische Performance der zweistufigen CAPM-Tests, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 66, S. 305-326.

Huang, Chi-fu/Litzenberger, Robert H. (1988), Foundations for Financial Economics.

Jobson, J. D./Korkie, Bob (1982), Potential Performance and Tests of Portfolio Efficiency, in: Journal of Financial Economics, Vol. 10, S. 433-466.

Jobson, J. D./Korkie, Bob (1989), A Performance Interpretation of Multivariate Tests of Asset Set Intersection, Spanning, and Mean-Variance Efficiency, in: Journal of Financial and Quantitative Analysis 24, S. 185-204.

Kandel, Shmuel/Stambaugh, Robert F. (1987), On Correlations and Inferences about Mean-Variance Efficiency, in: Journal of Financial Economics, Vol. 18, S. 61-90.

Lintner, John (1965), The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets, in: The Review of Economics and Statistics, Vol. 47, S. 13-37.

MacKinlay, A. Craig (1987), Multivariate Tests of the CAPM, in: Journal of Financial Economics, Vol. 18, S. 341-371.

MacKinlay, A. Craig (1995), Multifactor Models do not explain Deviations from the CAPM, in: Journal of Financial Economics, Vol. 38, S. 3-28.

Merton, Robert (1973), An Intertemporal Capital Asset Pricing Model, in: Econometrica, Vol. 41, S. 867-887.

Miller, Merton H./Scholes, Myron (1972), Rates of Return in Relation to Risk: A Re-examination of Some Recent Findings, in: *Jensen, Michael C.*, Studies in the Theory of Capital Markets, S. 47-78.

Mossin, Jan (1966), Equilibrium in a Capital Asset Market, in: Econometrica, Vol. 34, S. 768-783.

Roll, Richard (1977), A Critique of the Asset Pricing Theory's Tests Part I: On Past and Potential Testability of the Theory, in: Journal of Financial Economics, Vol. 4, S. 129-176.

Ross, Stephen A. (1976), The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing, in: Journal of Economic Theory, Vol. 13, S. 341-360.

Shanken, Jay (1985), Multivariate Tests of the Zero-Beta CAPM, in: Journal of Financial Economics, Vol. 14, S. 327-348.

Shanken, Jay (1987), Multivariate Proxies and Asset Pricing Relations - Living with the Roll Critique, in: Journal of Financial Economics, Vol. 18, S. 91-110.

Shanken, Jay (1992), On the Estimation of Beta-Pricing Models, in: The Review of Financial Studies, Vol. 5, S. 1-33.

Sharpe, William F. (1964), Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk, in: Journal of Finance, Vol. 19, S. 425-442.

Summary

The present paper deals with the performance of CAPM tests in which inferences are made about the validity of the Sharpe-Lintner CAPM (or another equilibrium pricing relation). The main problem is that the market portfolio is not directly observable and proxies have to be employed in empirical tests. This index problem is also the main point in the *Roll* critique (1977). *Roll* concludes that ‘the theory is not testable unless the exact composition of the true market portfolio is known and used in the tests’. In this paper the performance of the cross-sectional-regression (CSR)-test is investigated in some detail. It turns out that the index pro-

blem cannot be eliminated by the CSR-test and other multivariate tests. Moreover, the CSR-test has extremely low power, even in the case of a moderate number of assets. Therefore, a test procedure proposed by *Shanken* (1987) and *Kandel/Stambaugh* (1987) which is based on the CSR-test and tests a joint hypothesis that (a) the CAPM is valid, and (b) the correlation between the true market portfolio and the proxy portfolio exceeds a given value, has also low power. For a sufficient power it requires an unrealistically large number of observation times that is not available in practice. The power of a multifactor extension of the CSR-test introduced by *MacKinlay* (1995) and *Fama/French* (1993,1996) is also investigated. It turns out that there may be an additional considerable loss of power compared to the single regressor CSR-test. In the last section an artificial capital market is generated. This financial market is in equilibrium and the CAPM is valid. The performance of the tests and the problems are illustrated in several simulation studies.